Suites définies par récurrence (223, 224, 226, 230)

Bernis et Bernis p. 145

Prop : Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est continue, croissante,

- $\forall x \in]0,b]$, $f(x) < x$ et $f(0) = 0$ (∗∗)
- $\exists \lambda > 0$ et $r > 1$ tels que : $f(x) \underset{x \to 0}{=} x - \lambda x^r + o(x^r)$ (∗)

Pour tout $c \in]0,b[$, la relation $u_0 = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$ définit une suite à valeurs dans $]0,b[$ de limite 0.

De plus $u_n \sim \dfrac{K}{n^{\frac{1}{r-1}}}$ où $K = \left(\lambda(r-1)\right)^{\frac{1}{1-r}}$

démo :

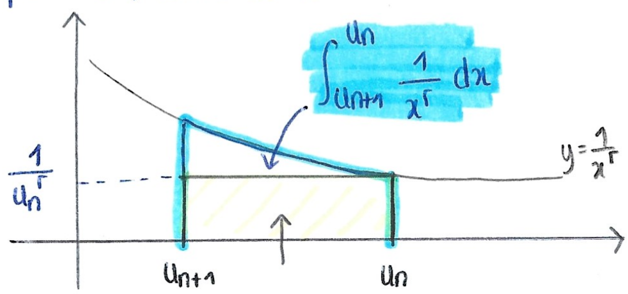
- $(u_n)_n$ suite à valeurs dans $]0,b[$.

  f est croissante et vaut 0 en 0. Si f s'annulait en $y \in]0,b[$ alors elle serait nulle sur $[0,y]$.
  Or ceci n'est pas possible par (∗). Donc on a $\forall x \in]0,b[$, $0 < f(x) \leq x < b$. ie f laisse stable $]0,b[$.

- $(u_n)_n$ converge vers 0.

  La suite $(u_n)_n$ décroît par (∗∗) et est minorée par 0, donc elle converge vers un élément $l \in [0,b]$.
  Mais f est continue donc l est un point fixe de f. Or $f(0) = 0$, donc $l = 0$.

  Ainsi $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.



- $u_n \sim \dfrac{1}{\left((r-1)\lambda n\right)^{\frac{1}{r-1}}}$

On a $f(u_n) \underset{u_n \to 0}{=} u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r)$, donc $\lambda \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r}$

$\dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r}$

Mq $\lambda \underset{n+\infty}{\sim} \displaystyle\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{x^r} dx = \frac{1}{1-r}\left(u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}\right)$ suggéré par

$$\frac{1}{1-r}\left(u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}\right) = \frac{1}{1-r}\left(u_n^{1-r} - \left(u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r)\right)^{1-r}\right)$$

$$= \frac{1}{1-r}\left(u_n^{1-r}\left(1 - \left(1 - \lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})\right)^{1-r}\right)\right)$$

$(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + o(x)$

$$= \frac{1}{1-r}\left(u_n^{1-r}\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} + (1-r)\left[-\lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})\right]\right) + \underbrace{o\left(-\lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})\right)}_{o(u_n^{r-1})}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1-r}\left(u_n^{1-r}\left((1-r)\lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1-r}\left((1-r)\lambda + o(1)\right) = \lambda + o(1).$$

Or $\lambda > 0$ donc $\sum_n \lambda$ diverge ainsi $n\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k^{1-r} - u_{k+1}^{1-r}}{r-1} = \frac{u_0^{1-r} - u_n^{1-r}}{r-1}$

Donc $u_n^{1-r} \sim n\lambda(r-1)$ ie $u_n \sim (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$, puisque u_0^{1-r} est négligeable devant u_n^{1-r} car $r > 1$.

Appli : Pour $f : x \longmapsto \ln(1+x)$, on a $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$

démo : • f vérifie les hypothèses :

* f est croissante et continue sur $[0, b]$, $f(0) = \ln(1) = 0$
* $\forall x \in]0, b]$, $f(x) = \ln(1+x) < x$ par strict concavité du log
* $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc $\lambda = \frac{1}{2} > 0$ et $r = 2 > 1$.

Ainsi d'après la prop, on a $u_n \sim \left(n\frac{1}{2}(2-1)\right)^{\frac{1}{1-2}}$ ie $u_n \sim \frac{2}{n}$.

• DA de $\frac{1}{1-r}\left(u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}\right)$ ie $u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1}$.

$$u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} = \left(u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{3}u_n^3 + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^3)\right)^{-1} - u_n^{-1}$$

$$= u_n^{-1}\left(\left(1 - \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}u_n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^2)\right)^{-1} - 1\right)$$

$$= u_n^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{1}{4}u_n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^2) - 1\right)$$

$(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2 + O(x^3)$ ou $+o(x^2)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}u_n + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n).$$

• $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} - \frac{1}{2}$. D'après ce qui précède on a $x_n \sim -\frac{1}{12}u_n \sim -\frac{1}{6n}$

Donc $\sum_{k=1}^{n} x_k \sim -\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim -\frac{1}{6}\ln(n)$.

Ainsi $u_n^{-1} - u_0^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^{-1} - u_k^{-1} = \frac{n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{n}{2} - \frac{1}{6}\ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))$

Donc $u_n = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{6}\ln(n) + o(\ln(n))\right)^{-1}$

$$= \frac{2}{n}\left(1 - \frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Questions : Suites définies par récurrence

- Pourquoi $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda$?

On a équivalence entre $\lambda \sim \frac{1}{r-1}\left(u_k^{1-r} - u_{k+1}^{1-r}\right)$ et $\lambda > 0$ donc $\sum_{n\geq 0} \lambda$ diverge.

Ainsi par le théorème de sommation des équivalents, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k^{1-r} - u_{k+1}^{1-r}}{r-1}.$$

- Pourquoi $\sum_{k=0}^{n-1} x_k$?

On a $x_k \sim -\frac{1}{6k}$ or $-\frac{1}{6k}$ est le terme général d'une série divergente (série de Riemann).

Donc par sommation des équivalents on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \sim \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{6k}.$$

- Pourquoi $u_n = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{6}\ln(n) + o(\ln(n))\right)^{-1}$?

On a $u_n^{-1} = \frac{n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{n}{2} - \frac{1}{6} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k}}_{= \ln(n) + o(\ln(n))} + u_0^{-1}$.

De plus $\dfrac{u_n^{-1} - \frac{n}{2} + \frac{\ln(n)}{6}}{\ln(n)} = \dfrac{u_n^{-1} - u_0^{-1} - \frac{n}{2} + \frac{\ln(n)}{6}}{\ln(n)} + \dfrac{u_0^{-1}}{\ln(n)} = o(1) + \dfrac{u_0^{-1}}{\ln(n)} \to 0+1$

puisque $\frac{u_0}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc u_0 est négligeable devant u_n.

Ainsi $u_n = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{6}\ln(n) + o(\ln(n))\right)^{-1}$.

- Pourquoi $\left(1 - \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}u_n^2 + o(u_n^2)\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}u_n^2 + \underbrace{\frac{1}{4}u_n^2}_{= +\frac{1}{4}u_n^2} + o(u_n^2)$?

$$\left(1 - \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}u_n^2 + o(u_n^2)\right)^{-1} = 1 + (-1)\left[-\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}u_n^2 + o(u_n^2)\right] + \frac{(-1)(-1-1)}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}u_n^2 + o(u_n^2)\right)\right]^2$$

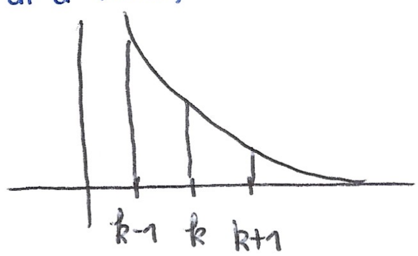
$$+ \underbrace{o\left(\left(-\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}u_n^2 + o(u_n^2)\right)^2\right)}_{} = o(u_n^4).$$

$$= 1 + \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}u_n^2 + o(u_n^2) + \frac{1}{4}u_n^2 = 1 + \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{12}u_n^2 + o(u_n^2).$$

• Pourquoi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$?

On a $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k}$ diverge. On a $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante donc on a $\forall k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$$



En sommant pour k allant de 2 à n, on obtient

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n} \frac{dt}{t}$$

$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

Donc $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $\ln(n) \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$